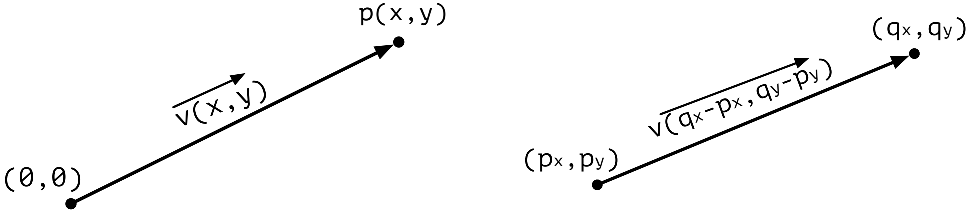
# Алгоритмы и структуры данных

## Лекция 21
## Геометрия.

Сергей Леонидович Бабичев

# Средства

- Будем работать в ортонормированном базисе $\mathbb{R}^2$.
- Точки — $p(x, y)$.
- Каждая точка однозначно определяет радиус-вектор из начала координат.




- Вектор может представляться точно так же.

# Представление и операции

```
template<typename T>
struct point {
    T x,y;
    point(T const &x, T const &y) : x(x), y(y) {}
};
```

- Для любых двух точек на плоскости существует вектор $\overrightarrow{v}$.

```
point operator -(point const &oth) const {
    return {oth.x-x, oth.y-y};
}
```

- Вектора можно складывать:

```
point operator +(point const &oth) const {
    return {oth.x+x, oth.y+y};
}
```

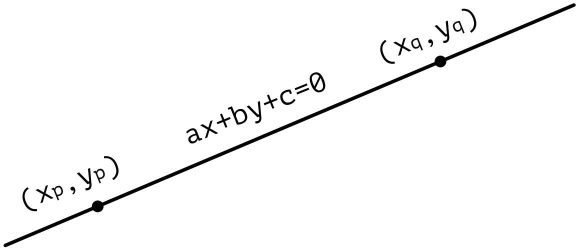
# Представление и операции

- Вектор можно умножить на число:

```
point operator *(T k) const {
    return {k*x, k*y};
}
```

# Прямая

- Для вычислительной геометрии традиционное представление прямой как $y = kx + b$ не подходит.
- Вертикальные прямые так не представляются.
- Но подходит $ax + by + c = 0$.
- Это представление неоднозначно с точностью до множителя $\lambda \neq 0$: $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$.



# Прямая

```
template<typename T>
struct line {
    T a,b,c;
    line(T const &a, T const &b, T const &c): a(a), b(b), c(c) {}
};
```

Для стандартизации представления можно делить на $\gcd(a, b)$ и менять знаки чтобы $a \geqslant 0$.

# Прямые и точки

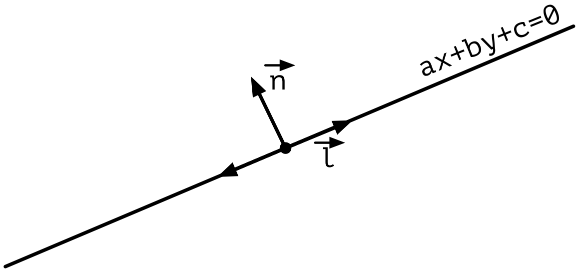
- Прямая, проходящая через точки $p(x_p, y_p)$ и $q(x_q, y_q)$ может быть выражена как

$$\begin{cases} a = y_p - y_q \\ b = x_q - x_p \\ c = x_p y_q - x_q y_p \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство — подстановка $p$ и $q$ в (1).

# Вектора нормали и направляющий

- Для прямой $ax + by + c$ имеются вектора: нормаль $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{(a, b)}$ и направляющий $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{(b, -a)}$.
- Эти вектора могут представляться и в виде $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{(-a, -b)}$ и $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{(-b, a)}$.
- Вектор $\overrightarrow{n}$ здесь не нормирован!
- Нормированная нормаль $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$



## Lemma (Расстояние от точки до прямой)

*Для прямой* $l(a, b, c)$ *и точки* $p(x, y)$ *расстояние* $\rho$ *между ними равно*

$$\rho(l, p) = \frac{l_a p_x + l_b p_y + c}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}} \tag{2}$$

## Доказательство.

Расстояние от $l$ до $p$ определяется по нормали. Пусть вектор от $p$ до точки $p' \in l$, ближайшей к $p$, есть $\lambda \overrightarrow{n}$. Тогда $p' = p + \lambda \overrightarrow{n}$. $p' = (p_x + \lambda l_a, p_y + \lambda l_b)$. Подставим в уравнение прямой:

$$a(p_x + \lambda l_a) + b(p_y \lambda l_b) + l_c = 0.$$

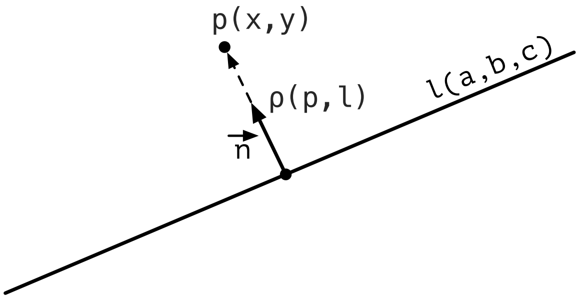
$$\lambda(l_a^2 + l_b^2) = -l_a p_x - l_b p_y + l_c \to \lambda = \frac{-l_a p_x - l_b p_y - l_c}{l_a^2 + l_b^2}$$

Умножив на $n$ получаем $|\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(p, p')}| = \dfrac{|-l_a p_x - l_b p_y - l_c|}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}} = \dfrac{|l_a p_x + l_b p_y + c|}{\sqrt{l_a^2 + l_b^2}}$ □

# Проекция точки на прямую

**Задача 1.** Найти координаты точки проекции точки $p$ на прямую $l$.

- Знаая вектор $\overrightarrow{n}$ и коэффициент $\lambda$ замечаем, что проекция точки на прямую $l$ равна $p' = p - \lambda\overrightarrow{n}$.



# Пересечение двух прямых

**Задача 2.** Найти точку пересечения прямых $l_1$ и $l_2$.

- Пусть имеется две прямые $l_1 = (a_1x + b_1y + c_1)$ и $l_2 = (a_2x + b_2y + c_2)$, то точка их пересечения $p = (x_0, y_0)$, если она существует, есть решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

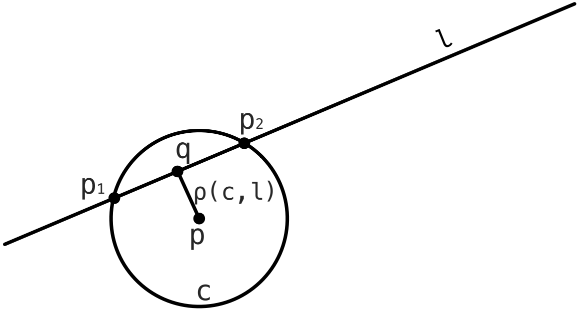
Здесь проще всего использовать метод Крамера:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & a_2 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

# Пересечение прямой и окружности

**Задача 3.** Найти точки пересечения прямой $l$ и окружности $c$.

- Окружность $c$ можно представлять центром $p$ и радиусом $r$.
- Найти точки пересечения с прямой $l = ax + by + c = 0$.



# Пересечение прямой и окружности

- Наивный вариант:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = r^2. \end{cases}$$

  Приходится отдельно рассматривать случаи, когда $a = 0$ или $b = 0$.

- Более удачный вариант: найти кратчайшее расстояние от центра окружности до прямой. Отложить от точки пересечения по прямой в обе стороны оставшееся расстояние. $p_1 = q + k\overrightarrow{v}, p_2 = q - k\overrightarrow{v}$, где $k^2 = r^2 - \rho(p, q)^2$ и $\overrightarrow{v}$ — направляющий вектор $l$ единичной длины.

# Пересечение двух окружностей

**Задача 4.** Имеются две окружности: $c_1 = (p_1, r_1)$ и $c_2 = (p_2, r_2)$. Найти точки их пересечения, если они есть.

- Наивное решение: рассмотреть все случаи взаимного расположения окружностей. Их много.

# Пересечение двух окружностей

- Более удачное решение: строим систему (3).

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - x_2)^2 = r_2^2. \end{cases} \tag{3}$$

- Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \\ (2x_1 - 2x_2)x + (2y_1 - 2y_2)y = y_2^2 - y_1^2. \end{cases}$$

- Второе уравнение — уравнение прямой. Мы свели дело к предыдущей задаче.

# Скалярное произведение векторов

**Задача 5.** Определить тип угла между двумя векторами — острый, прямой или тупой.

- Скалярное произведение $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$.

```
// struct point
T dot(point const &oth) const {
    return x*oth.x + y*oth.y;
}
```

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$.
- $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
- Легко качественно определяется угол между векторами — для острого угла $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, для прямого $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, для тупого $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

# Векторное произведение векторов

- Для двухмерных векторов $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{(x_1, y_1)}$ и $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{(x_2, y_2)}$ векторное произведение $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ определяется как частный случай векторного произведения трёхмерных векторов $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2)$.
- Как известно из ЛА, по ортонормированному базису это — вектор, определяемый по формуле 4:

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ — орты по осям $x, y, z$ соответственно.

- Произведение есть вектор, ортогональный сомножителям.
- Его величина равна ориентированной площади параллелепипеда, построенного на сомножителях.
- Если знак положителен, то направление вектора соответствует соотношениям ортов иначе оно противоположно.

# Векторное произведение векторов

- Для двумерных векторов третья координата равна нулю:

$$(x_1, y_1, 0) \times (x_2, y_2, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}\,. \tag{5}$$

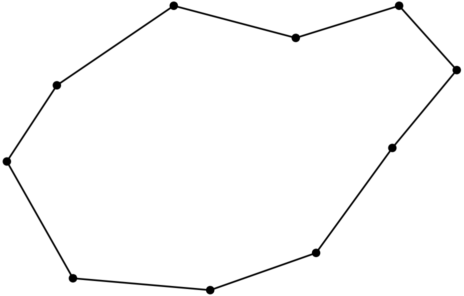
- Знак определяется поворотом первого сомножителя по направлению ко второму на угол, не превосходящий $\pi$.
- Удобно определять направление кратчайшего поворота первого вектора на второй. Положительный знак — поворот против часовой стрелки.
- Нулевой произведение — векторы либо сонаправлены, либо противоположны.
- Простейший способ определения, лежат ли три точки на одной прямой.

# Векторное произведение векторов

- Формула (5) позволяет решать следующие задачи:
  1. Определять площадь параллелограмма или треугольника, построенных на двух отрезках;
  2. определять направление поворота вектора — по часовой стрелке или против часовой стрелки;
  3. определять $\sin\varphi$ — угол между векторами.
- Обратите внимание, что площади треугольников и параллелограммов, построенные на целочисленных векторах полуцелочисленны, то есть кратны $\frac{1}{2}$.

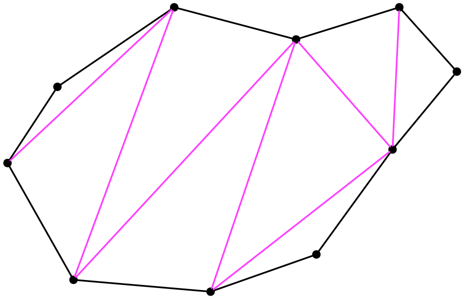
**Задача 6.** Определить, отношение заданной целочисленной точки $p(x_0, y_0)$ к треугольнику, вершины которого находятся в целочисленных точках $p_1, p_2$ и $p_3$ — находится ли она внутри треугольника, на стороне его или вне.

**Задача 7.** Имеется произвольный многоугольник, представленный замкнутой несамопересекающейся ломанной. Какое количество камер с углом обзора $360^\circ$ требуется поставить внутрь многоугольника, чтобы все его точки оказались видимыми?



# Простое решение

- Проведём такое количество отрезков, находящихся внутри фигуры и соединяющих вершины, чтобы всё оказалось разбитым на треугольники.
- Назовём все проведённые отрезки *диагоналями*. Это отрезки между несоседними вершинами, целиком лежащие во внутренностях многоугольника.
- Очевидно, мы получили верхнюю границу количества камер по количеству треугольников.



# Триангуляция многоугольников

- Для многоугольника с $N$ вершинами количество получившихся треугольников равно $N - 2$.
- Доказывается по индукции.
- Оказывается, достаточно $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ камер (не доказываем).

# Алгоритм триангуляции многоугольника за $O(N^2)$

**Lemma**

*Для выпуклого N-угольника достаточно $O(N)$ операций;*

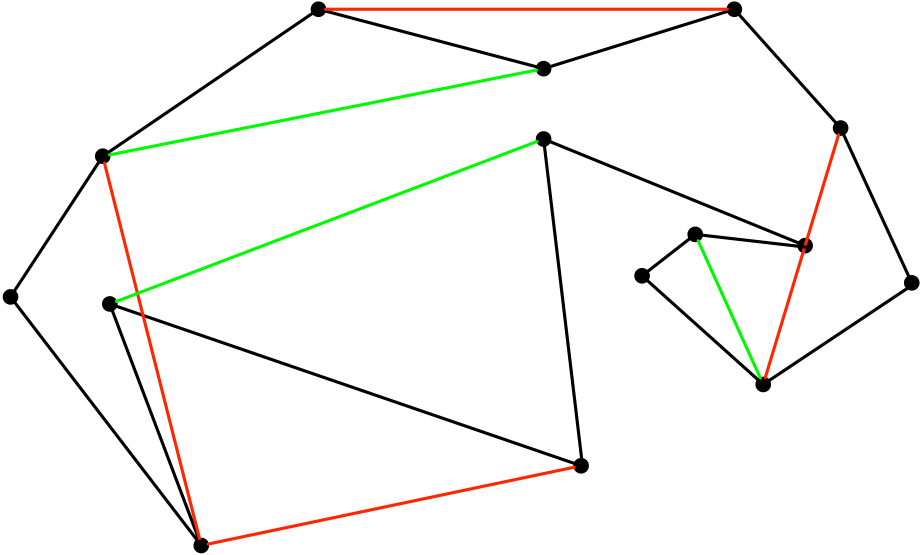
**Доказательство.**

Выбираем произвольную вершину и проводим из неё все диагонали. $\square$

**Definition (Ухо многоугольника)**

Треугольник, образованный тремя последовательными вершинами $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ многоугольника называется *ухом*, если он целиком лежит в многоугольнике и внутри или на границе этого треугольника нет других вершин.

# Примеры ушей и не ушей



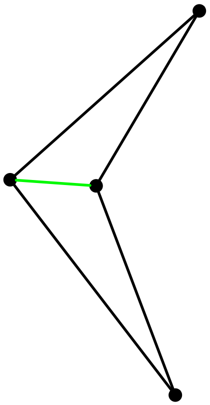
## Lemma

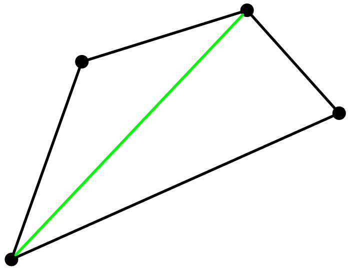
*В любом многоугольнике без самопересечений сторон с количеством вершин, больших трёх, существует хотя бы два не пересекающихся уха.*

## Доказательство.

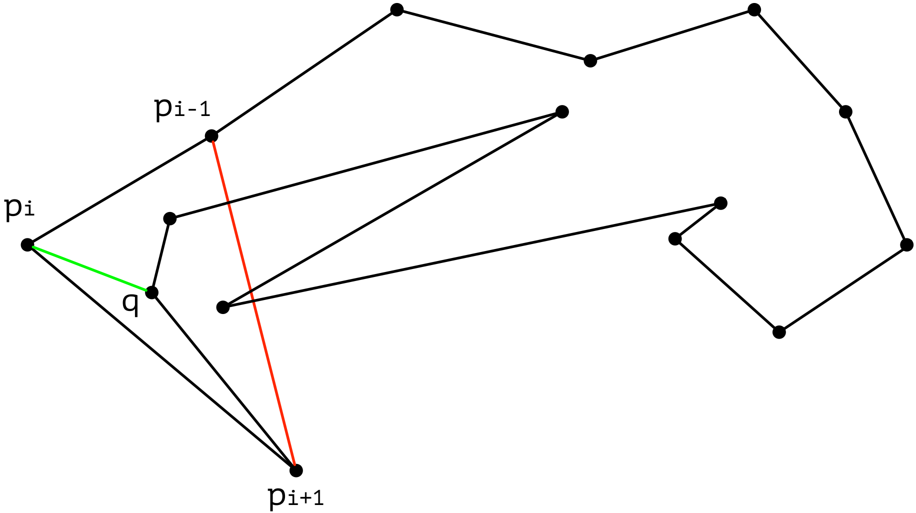
База индукции. Для $N = 4$ имеется два типа многоугольников.

□





Переход для $N > 4$. Рассмотрим произвольную вершину $p_i$, в которой угол между векторами $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{(p_i, p_{i-1})}$ и $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{(p_i, p_{i+1})} < \pi$. Если это — ухо, то отрезав его мы свели к доказанному случаю $N - 1$.
Это может оказаться не ухом.



Существуют вершины попавшие в треугольник, образованный ухом. Выберем из них такую точку $q$, которая лежит ближе всего к точке $p_i$. Утверждаем, что $(p_i, q)$ — диагональ. На нём нет других точек. Он лежит внутри треугольника и другие стороны его не пересекают. Тогда разбиваем многоугольника на два. В обеих частях не менее трёх вершин. В каждой части есть хотя бы одно ухо.

# Алгоритм триангуляции

- Заведём двусвязный список вершин.
- Находим и отрезаем одно ухо:
  - Пройдём по всем вершинам и найдём произвольную выпуклую вершину $p_i$.
  - Проводим отрезок $(p_{i-1}, p_{i+1})$.
  - Если внутри треугольника нет вершин, то мы нашли ухо.
  - Иначе находим точку $q$, лежащую внутри треугольника, ближайшую к $p_i$. Диагональ $(p_i, q)$ разбивает многоугольник на два, в хотя бы одном из них количество вершин меньше $N/2 + 1$. Рекурсивно ищем ухо в меньшем многоугольнике.

$$T(N) = O(N) + T\left(\frac{N}{2}\right) \to T(N) = O(N).$$

- Всего отрезается $O(N)$ ушей — итог

$$T = O^2(N)$$

.