Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines 2019-2020
Master 1 Informatique

Algorithmique de Graphes – Combinatoire, Énumération, Modélisation, et un peu de Graphes. Le TD du 16 Octobre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Exercice 1 *Nombre d'applications*

Le but de ces questions est de dénombrer correctement les applications d'un ensemble vers un autre.

— Quel est le nombre d'applications possibles différentes d'un ensemble fini X dans un ensemble fini Y ?

On considère un ensemble de comédiens et d'accessoires. Il y a sept comédiens : Anna, Boris, Charles, Daphnée, Estelle, Franck et Gaëlle et des accessoires : Chapeau, Lunettes, Foulard et Montre. De combien de manières différentes peut s'accessoiriser la troupe dans les cas suivants :

— Il y a autant d'accessoires que l'on veut et chaque comédien peut choisir de prendre ou non un accessoire.

— Il n'existe qu'un exemplaire de chaque accessoire.

— Les quatre accessoires doivent être tous utilisés ; un même comédien peut en porter un nombre quelconque (aucun, un seul, ou plusieurs).

— Il y a maintenant N comédiens et N accessoires(tous différents) et chaque comédien doit avoir exactement un accessoire.

— Comme précédemment mais il y a un nombre quelconque de comédiens et d'accessoires.

Exercice 2 *Coefficients binomiaux*

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de choix de k éléments parmi n ; autrement dit, c'est le nombre de sous-ensembles à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

1. Sans calcul, montrer que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ – ce qui explique le nom de *coefficient binomial.*
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Par un argument bijectif, montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (règle de Pascal)
5. Calculer la valeur de $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n \leq 7$.
6. En déduire un algorithme pour calculer $\binom{n}{k}$ avec uniquement des additions (triangle de Pascal).
7. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (pour $0 \leq k \leq n$).

Exercice 3 *Loto*

On dispose n boules dans une urne, numérotées de 1 à n. Vous pouvez tirer une boule au hasard et vous gagnez alors la valeur inscrite sur la boule.

1. Quel est votre gain moyen ?
2. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$?

   Indication : faire comme le petit Gauss à 9 ans et placer en ligne les entiers de 1 à n puis en dessous placer les entiers de n à 1.

Exercice 4 *Nombre de cellules d'un arrangement de droites en position générale.*

On dit qu'un ensemble de droites du plan est en position générale si deux droites quelconques d'entre elles s'intersectent (en un point) et trois droites quelconques d'entre elles ont une intersection vide.
Combien n droites du plan en position générale délimitent-elles de regions du plan ?

Exercice 5 *Plutôt deux fois qu'une.*

1. Considérons une classe de n étudiants. Supposons qu'à la fin de chaque cours, 3 étudiants restent pour laver l'amphi. À la fin du cours ils réalisent que chaque paire d'étudiant est restée exactement une fois. Combien de jours a duré le cours ?
2. On veut calculer le nombre de carrés qu'on peut dessiner dans une grille n sur n (en tenant en compte de leur position). Donner une expression pour ce nombre.
3. Comptez le nombre de triplets (x, y, z) tel que z est strictement supérieur à x et y.
4. Comptez de deux manières différentes le nombre de triplets (x, y, z) à valeur dans $[1, \ldots, n]$. En déduire une expression plus simple pour la question précédente.

   Indication : faites des cas selon les positions de z par rapport à x et y. Ne pas hésiter à faire beaucoup de cas pour simplifier les calculs.

Exercice 6 *Principe des tiroirs.*

Si on range n pigeons dans m tiroirs avec $m < n$, un tiroir contient plusieurs pigeons.

1. Sachant qu'une tête normale a au plus 1.000.000 cheveux, montrez qu'il y a au moins deux personnes à Paris qui ont le même nombre de cheveux
2. Montrer que dans un graphe, il existe deux sommets qui ont le même degré.
3. Montrer la généralisation suivante du principe des tiroirs : si un ensemble de $mr+1$ éléments est partitionné en m ensembles, un ensemble contient au moins $r + 1$ éléments.

Exercice 7 *Lemme des poignées de main*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On note $d(v)$ le degré d'un sommet $v \in V$. Montrer que :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Graphe non orienté

Définition 1. Graphe Non Orienté

> $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini de sommets et où $E \subseteq V \times V$ est un ensemble de paires non ordonnées de sommets appelées *arêtes*.

— On note $[u, v]$ l'arête entre les sommets u et v de G.

— Pour une arête $[u, v] \in E$, v est un *voisin* de u et u est un *voisin* de v.

Définition 2. Adjacence

> Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune. Deux sommets sont adjacents s'il existe une arête dont les extrémités sont ces deux sommets.

Définition 3. Degré d'un sommet

> Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré d'un sommet $u \in V$ dans un graphe non orienté, noté $d(u)$, est le nombre de voisins de u.