Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines 2019-2020
Master 1 Informatique

**Algorithmique de Graphes – Combinatoire, Énumération, Modélisation, et un peu de Graphes. Le TD du 16 Octobre 2019**

*Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/*

**Exercice 1** *Nombre d'applications*

Le but de ces questions est de dénombrer correctement les applications d'un ensemble vers un autre.

— Quel est le nombre d'applications possibles différentes d'un ensemble fini $X$ dans un ensemble fini $Y$ ?

**From Tatiana**

> $|Y|^{|X|}$

On considère un ensemble de comédiens et d'accessoires. Il y a sept comédiens : Anna, Boris, Charles, Daphnée, Estelle, Franck et Gaëlle et des accessoires : Chapeau, Lunettes, Foulard et Montre. De combien de manières différentes peut s'accessoiriser la troupe dans les cas suivants :

— Il y a autant d'accessoires que l'on veut et chaque comédien peut choisir de prendre ou non un accessoire.
**From Tatiana**

> $5^7$ — Chaque comédien va prendre n'importe lequel des accessoires ou ne prendre rien.

— Il n'existe qu'un exemplaire de chaque accessoire.
**From Tatiana**

> sum pour chaque possibilité de set d'accessoires
>
> 1) Si tous les accessoires sont pris : pour prendre le premiere parmi 4 il y a 7 comédiens etc.
>
> Alors, en totale il y a $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ cas
>
> 2) Si on a pris 3 accessoires en total il y a 4 possibilités de choisir 3 accessoires parmi 4, et pour choisir les comédiens il y a $7 \cdot 6 \cdot 5$ cas
>
> 3) Si on a pris 2 accessoires en total il y a 6 possibilités de choisir 2 accessoires parmi 4, et pour choisir les comédiens il y a $7 \cdot 6$ cas
>
> 4) Si on a pris 1 accessoires en total il y a 4 possibilités de choisir 1 accessoire parmi 4, et pour choisir le comédien il y a 7 cas
>
> 5) Si aucune des accessoires n'est pas pris, il existe 1 seul cas.
>
> Le réponse est la somme des tous les cas.

— Les quatre accessoires doivent être tous utilisés ; un même comédien peut en porter un nombre quelconque (aucun, un seul, ou plusieurs).
**From Tatiana**

> Autre problème : si on considère le tas infini des accessoires : alors, chaque accessoire peut être utilisé par un ou plusieurs comédiens.
>
> Alors, pour chaque accessoire il y a nombre des cas égal à $2^7 - 1$ ($2^7$ est le nombre totale pour chaque comédien (pris ou non pris), et 1 est pour le cas quand personne ne pris cette accessoire). Alors, le réponse est $(2^7 - 1)^4$
>
> Si il n'y a qu'un exemplaire de chaque accessoire : $7^4$

— Il y a maintenant $N$ comédiens et $N$ accessoires(tous différents) et chaque comédien doit avoir exactement un accessoire.
**From Tatiana**

$N!$

— Comme précédemment mais il y a un nombre quelconque de comédiens et d'accessoires.
**From Tatiana**

Il y a $N$ comédiens et $M$ accessoires.
Premier comédien va choisir parmi $M$, deuxième — parmi $M-1$ etc.
Alors, le réponse est $M(M-1)\dots(M-N+1) = \frac{M!}{(M-N)!}$

**Exercice 2** *Coefficients binomiaux*

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de choix de $k$ éléments parmi $n$ ; autrement dit, c'est le nombre de sous-ensembles à $k$ éléments de $\{1, \dots, n\}$.

1. Sans calcul, montrer que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ – ce qui explique le nom de *coefficient binomial*.
   **From Tatiana**

   supprimes les parentheses

2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
   **From Tatiana**

   Explorer le binom $(1+1)^n$. Autre solution, combinatoire : chaque élément peut être choisi ou non-choisi

3. Par un argument bijectif, montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
   **From Tatiana**

   Choisir $k$ elements de parmi $n$ c'est le même que ne pas choisir $n-k$ elements parmi $n$

4. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (règle de Pascal)
   **From Tatiana**

   Nous pouvons choisir et fixer un element : soit il est pris, soit il n'est pas pris

5. Calculer la valeur de $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n \leq 7$.
   **From Tatiana**

   On commence de dessiner le triangle de Pascal

6. En déduire un algorithme pour calculer $\binom{n}{k}$ avec uniquement des additions (triangle de Pascal).
7. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (pour $0 \leq k \leq n$).
   **From Tatiana**

   Par combinatoire

**Exercice 3** *Loto*

On dispose $n$ boules dans une urne, numérotées de 1 à $n$. Vous pouvez tirer une boule au hasard et vous gagnez alors la valeur inscrite sur la boule.

1. Quel est votre gain moyen ?
   **From Tatiana**

On peux faire 2. et après 1. , c'est bon. Ici on divise la somme total par nombre des boules

2. Que vaut $\sum_{i=0}^{n} i$ ?
   **From Tatiana**

   c'est déjà marqué

   Indication : faire comme le petit Gauss à 9 ans et placer en ligne les entiers de 1 à $n$ puis en dessous placer les entiers de $n$ à 1.

**Exercice 4** *Nombre de cellules d'un arrangement de droites en position générale.*

On dit qu'un ensemble de droites du plan est en position générale si deux droites quelconques d'entre elles s'intersectent (en un point) et trois droites quelconques d'entre elles ont une intersection vide.
Combien $n$ droites du plan en position générale délimitent-elles de regions du plan ?
**From Tatiana**

je voudrais le faire par induction
On fais les données pour 0 droits — 1 region
1 droit — 2 regions etc.
On obtient le formule $1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

**Exercice 5** *Plutôt deux fois qu'une.*

1. Considérons une classe de $n$ étudiants. Supposons qu'à la fin de chaque cours, 3 étudiants restent pour laver l'amphi. À la fin du cours ils réalisent que chaque paire d'étudiant est restée exactement une fois. Combien de jours a duré le cours ?
   **From Tatiana**

   $\frac{C_n^2}{C_3^2}$

2. On veut calculer le nombre de carrés qu'on peut dessiner dans une grille $n$ sur $n$ (en tenant en compte de leur position). Donner une expression pour ce nombre.
   **From Tatiana**

   Pour taille de petit carré 1 il y a $n^2$ carrés, pour taille 2 — $(n-1)^2$, etc. Alors, c'est sum $1^2+2^2+\ldots+n^2$
   Ce somme peut être calculé par induction et égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Ou il y a une solution géométrique
   http://www.etudes.ru/ru/models/sum-of-squares/

3. Comptez le nombre de triplets $(x, y, z)$ tel que $z$ est strictement supérieur à $x$ et $y$.
   **From Tatiana**

   je crois que il y a une petite faute dans le problème et qu'il faut marquer que les inconnues sont à valeur dans $[1, \ldots, n]$
   On vais le résoudre par induction :
   Base $n = 2$, il y a 1 cas
   Pour $n = k$, il y a $F(k)$ cases
   Pour $n = k + 1$ :
   Si $z = k + 1$, alors $x$ et $y$ peuvent être n'importe quelles mais plus petits que $k + 1$, alors $k$ cas pour chaque inconnue que donne $k^2$ cas
   si $z$ non égal à $k+1$, alors $x$ et $y$ sont plus petit que $k+1$ aussi et le nombre des triplets égal à $F(k)$

Alors, $F(k+1) = k^2 + F(k)$
On peut obtenir que $F(n) = (n-1)^2 + \ldots + 1^2$

4. Comptez de deux manières différentes le nombre de triplets $(x, y, z)$ à valeur dans $[1, \ldots, n]$. En déduire une expression plus simple pour la question précédente.

   Indication : faites des cas selon les positions de $z$ par rapport à $x$ et $y$. Ne pas hésiter à faire beaucoup de cas pour simplifier les calculs.

   **From Tatiana**

   Premiere manière :
   On peut choisir pour chaque de $x$, $y$ et $z$ un des nombres dans $[1, \ldots, n]$, alors en total c'est $n^3$.
   Deuxième manière : Si tous les trois sont différentes etc $C_n^3 \cdot 6 + C_n^2 \cdot 2 \cdot 2 + C_n^1$
   Troisième : $F(n) = F(n-1) + C_3^1(n-1)^2 + C_3^2(n-1) + C_3^3$
   Pour la question précédente :
   Si il y a trois nombres inégaux $C_n^3$ cas, pour nous chaque cas donne 2 possibilité possible.
   Si il y a deux nombres égaux et le troisième est inégale et superior - $C_n^2$ cas

## C'est quoi, les graphes ?

### Graphe non orienté

**Définition 1. Graphe Non Orienté**

> $G = (V, E)$ où $V$ est un ensemble fini de sommets et où $E \subseteq V \times V$ est un ensemble de paires non ordonnées de sommets appelées *arêtes*.

- On note $[u, v]$ l'arête entre les sommets $u$ et $v$ de $G$.
- Pour une arête $[u, v] \in E$, $v$ est un *voisin* de $u$ et $u$ est un *voisin* de $v$.

**Définition 2. Adjacence**

> Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune. Deux sommets sont adjacents s'il existe une arête dont les extrémités sont ces deux sommets.

**Définition 3. Degré d'un sommet**

> Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré d'un sommet $u \in V$ dans un graphe non orienté, noté $d(u)$, est le nombre de voisins de $u$.

**Exercice 6** *Principe des tiroirs.*
**From Tatiana**

Dirichlet

*Si on range $n$ pigeons dans $m$ tiroirs avec $m < n$, un tiroir contient plusieurs pigeons.*

1. Sachant qu'une tête normale a au plus 1.000.000 cheveux, montrez qu'il y a au moins deux personnes à Paris qui ont le même nombre de cheveux

   **From Tatiana**

à paris il y a 2 206 488 habitants en 2015 année, que est superior que 1000001.

2. Montrer que dans un graphe, il existe deux sommets qui ont le même degré.

**From Tatiana**

En total pour le graphe à $n$ sommets il est possible avoir les degrés de 0 à $n-1$, en total $n$ possibilités. Si quelque possibilité n'est pas utilisé, selon le principle de tiroir il y a deux sommets qui ont le même degré.

Si tous les possibilités sont utilisés, il y a un sommet à degré 0 et un a degré $n-1$, que n'est pas possible

3. Montrer la généralisation suivante du principe des tiroirs : si un ensemble de $mr+1$ éléments est partitionné en $m$ ensembles, un ensemble contient au moins $r+1$ éléments.

**From Tatiana**

Proof by contradiction (Preuve par l'absurde)

### Exercice 7

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On note $d(v)$ le degré d'un sommet $v \in V$. Montrer que :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

**From Tatiana**

Compter le nombre des bords des arêtes. On appelle ce fait "Lemme des poignées de main"
https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_des_poignées_de_main