Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines 2019-2020
Master 1 Informatique

Algorithmique de Graphes – Degrés. Le TD du 23 Octobre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Tous les graphes considérés dans cette section sont non orientés et simples, c'est-à-dire sans multi-arêtes et sans boucle.

Exercice 1

Montrer que dans une région comportant au moins deux habitants, il existe toujours deux personnes connaissant le même nombre d'habitants de cette région.

Graphe non orienté

Définition 1. Degré minimum d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré minimum de G, noté $\delta(G)$, est

$$\delta(G) = \min\{d(u), u \in V\}$$

Définition 2. Degré maximum d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est

$$\Delta(G) = \max\{d(u), u \in V\}$$

Exercice 2

On définit le degré moyen d'un graphe $G = (V, E)$ par $\bar{d} = \frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} d(v)$. Dans un graphe non vide (c'est-à-dire comportant au moins un sommet), montrer qu'il existe un sommet de degré au plus $\bar{d}$. Existe-t-il un toujours un sommet de degré au moins $\bar{d}$? Et un sommet de degré $\bar{d}$ exactement ?

Exercice 3 *Ordre des graphes k-réguliers.*

Un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k.

1. Dessiner un graphe 2-régulier à 9 sommets.
2. Dessiner un autre graphe 2-régulier à 9 sommets (non isomorphe au premier).
3. Dessiner un graphe 3-régulier à 8 sommets

La suite de cet exercice consiste à déterminer, pour un entier k donné, tous les entiers n pour lesquels il existe un graphe k-régulier à n sommets.

4. Traiter successivement les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

On considère maintenant le cas général : soit k un entier quelconque (fixé dans la suite de l'exercice)

5. Montrer que si il existe un graphe k-régulier à n sommets, alors $k < n$.
6. Donner une condition nécessaire sur la parité de n pour qu'il existe un graphe k-régulier à n sommets (on pourra utiliser l'exercice **??**).
7. Pour tout entier n vérifiant les deux conditions obtenues aux questions précédentes, construire un graphe k-régulier à n sommets. Conclure.

Exercice 4 *Suites des degrés des sommets d'un graphe.*

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est dite *graphique* si il existe un graphe à n sommets $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avec v_i de degré d_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Donner l'exemple de deux graphes non isomorphes ayant la même suite de degrés. (Ceci montre que cette suite ne caractérise pas le graphe.)
2. Les suites $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ et $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ sont-elles graphiques ?
3. Montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors $\sum_{i=1}^{n} d_i$ est pair.
4. Le but de cette question est de montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

   Soit G un graphe de suite de degrés $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sur les sommets $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avec $d(v_i) = d_i$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On pose $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $C = \{v_i \mid d_i < k\} \setminus A$ et $B = V \setminus (A \cup C)$. Soit $E_{A,A}$ l'ensemble des arêtes de G reliant deux sommets de A entre eux, $E_{A,B}$ les arêtes de G entre A et B, et $E_{A,C}$ les arêtes de G entre A et C.
   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{k} d_i = 2|E_{A,A}| + |E_{A,B}| + |E_{A,C}|$.
   (b) Montrer que $2|E_{A,A}| \leq k(k-1)$.
   (c) Montrer que $|E_{A,B}| \leq k|B|$.
   (d) Montrer $|E_{A,C}| \leq \sum_{v \in C} d(v)$.
   (e) Conclure.

   Les deux conditions précédentes réunies fournissent une caractérisation des suites graphiques, ce que nous ne montrerons pas. Nous allons à la place établir une caractérisation récursive des suites graphiques.
   Pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers $d = (d_1, \ldots, d_n)$ non vide, on définit

$$d' = \mathrm{tri}\,(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)\,.$$

5. Expliquer d'une phrase comment d' est obtenue à partir de d.
6. Montrer que si d est non vide, d est graphique si et seulement si d' est graphique.
7. En déduire un algorithme qui, étant donnée une suite d donnée en entrée, décide si elle est graphique et construit un graphe de suite de degrés d quand c'est possible.

Graphe non orienté

Définition 3. Chaîne dans un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une chaîne dans G est une suite de sommets $v_0 v_1 \ldots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs $[v_{i-1}, v_i]$, $i \in 1..n$ est une arête de E. La longueur de la chaine est le nombre d'arêtes de la chaîne.

Définition 4. Cycle dans un graphe non orienté

Un cycle dans un graphe non orienté est une chaîne telle que $v_0 = v_n$.

Exercice 5 *Degré minimum, longueur des cycles et chemins.*

On rappelle que le degré minimum du graphe G est défini par $\delta(G) := \min_{v \in V} d(v)$.

1. Montrer que G contient une chaîne de longueur $\delta(G)$.
2. Si $\delta(G) \geq 2$, montrer que G contient un cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$.