Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines 2019-2020
Master 1 Informatique

Algorithmique de Graphes – Degrés. Le TD du 23 Octobre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Tous les graphes considérés dans cette section sont non orientés et simples, c'est-à-dire sans multi-arêtes et sans boucle.

Exercice 1

Montrer que dans une région comportant au moins deux habitants, il existe toujours deux personnes connaissant le même nombre d'habitants de cette région.

From Tatiana

C'est le même problème que à TD1.

Puisque le graphe est simple, le degré d'un sommet quelconque appartient à $\{0, 1, ..., n-1\}$.

Par l'absurde : si les n sommets ont des degrés deux à deux distincts, c'est donc qu'il existe un sommet de degré i pour tout $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. En particulier, s'il existe un sommet A de degré 0, qui n'est donc relié à aucun sommet, et un sommet B de degré $n-1$, qui est relié à tous les sommets autres que lui-même, et en particulier à A. Contradiction.

Graphe non orienté

Définition 1. Degré minimum d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré minimum de G, noté $\delta(G)$, est

$$\delta(G) = \min\{d(u), u \in V\}$$

Définition 2. Degré maximum d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est

$$\Delta(G) = \max\{d(u), u \in V\}$$

Exercice 2

On définit le degré moyen d'un graphe $G = (V, E)$ par $\bar{d} = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$. Dans un graphe non vide (c'est-à-dire comportant au moins un sommet), montrer qu'il existe un sommet de degré au plus $\bar{d}$. Existe-t-il un toujours un sommet de degré au moins $\bar{d}$? Et un sommet de degré $\bar{d}$ exactement ?

From Tatiana

Par l'absurde. Si tous les degrés sont plus petits que $\bar{d}$ ou tous sont plus grand que $\bar{d}$, on obtiens contradiction.

Contre-example pour un sommet de degré $\bar{d}$ exactement est :

Une graphe K_4 plus deux parties avec un sommet degré 3 lié avec 3 sommets. Dans ce graphe il y a 6 sommets de degré 3 et 6 sommets de degré 1, et $\bar{d} = 2$

Exercice 3 *Ordre des graphes k-réguliers.*

Un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k.

1. Dessiner un graphe 2-régulier à 9 sommets.
   From Tatiana

   > 9gon

2. Dessiner un autre graphe 2-régulier à 9 sommets (non isomorphe au premier).
   From Tatiana

   > 4gon + 5gon

3. Dessiner un graphe 3-régulier à 8 sommets
   From Tatiana

   > 8gon avec les diagonales principales

La suite de cet exercice consiste à déterminer, pour un entier k donné, tous les entiers n pour lesquels il existe un graphe k-régulier à n sommets.

4. Traiter successivement les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.
   From Tatiana

   > $k = 0$ - pas des arêtes, un graphe vide
   > $k = 1$ - diviser par pairs, n doit être paire dans ce cas.
   > $k = 2$ - n-gon

On considère maintenant le cas général : soit k un entier quelconque (fixé dans la suite de l'exercice)

5. Montrer que si il existe un graphe k-régulier à n sommets, alors $k < n$.
   From Tatiana

   > Dans le graphe de n sommets on ne peux pas avoir le degré de sommet plus que $n - 1$, alors chaque sommet a le degré plus petit que n.

6. Donner une condition nécessaire sur la parité de n pour qu'il existe un graphe k-régulier à n sommets (on pourra utiliser l'exercice 7 de TD du 16/10).
   From Tatiana

   > La somme des degrés de graph sera $n \times k$, et cela doit être un nombre pair, par lemme de TD1.
   > Alors pour n qui est impair, k doit être pair et mois que n.
   > Pour n pair k peut être quelconnue plus petit que n.

7. Pour tout entier n vérifiant les deux conditions obtenues aux questions précédentes, construire un graphe k-régulier à n sommets. Conclure.
   From Tatiana

   > C'est facile, vous pouvez construire un des types vous-même. Pour la generation, il y a un article dans le dossier : Regular_Graph_Generation.pdf

Exercice 4 *Suites des degrés des sommets d'un graphe.*

Une suite décroissante (au sens large) d'entiers $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est dite *graphique* si il existe un graphe à n sommets $\{v_1, \ldots, v_n\}$ avec v_i de degré d_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Donner l'exemple de deux graphes non isomorphes ayant la même suite de degrés. (Ceci montre que cette suite ne caractérise pas le graphe.)
   From Tatiana

C'était déjà au-dessus : exercice 3, points 1 et 2.

2. Les suites $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ et $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ sont-elles graphiques ?
From Tatiana

Dans la suite premiere il y a 7 sommets et une des degrés égale à 7, ce n'est pas possible

Dans la suite premiere il y a 7 sommets parmi lesquelles il y a 2 sommets de degré 6, quelles dois être conjointes à tous les autres, alors les degrés de tous les autres sommets sont au mois 2, mais il y a une degré 1, ce n'est pas possible.

3. Montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors $\sum_{i=1}^{n} d_i$ est pair.
From Tatiana

C'est le consequence du Lemme des poignées de main

4. Le but de cette question est de montrer que si la suite $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est graphique, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

Soit G un graphe de suite de degrés $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sur les sommets $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avec $d(v_i) = d_i$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On pose $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $C = \{v_i \mid d_i < k\} \setminus A$ et $B = V \setminus (A \cup C)$. Soit $E_{A,A}$ l'ensemble des arêtes de G reliant deux sommets de A entre eux, $E_{A,B}$ les arêtes de G entre A et B, et $E_{A,C}$ les arêtes de G entre A et C.

(a) Montrer que $\sum_{i=1}^{k} d_i = 2|E_{A,A}| + |E_{A,B}| + |E_{A,C}|$.
From Tatiana

Dans partie A tous les arêtes ajoutent 2 à la somme totale, et les arêtes entre A et B ou C ajoutent 1.

(b) Montrer que $2|E_{A,A}| \leq k(k-1)$.
From Tatiana

La somme d'arêtes dans la partie A ne peut pas plus que la somme de degrés dans un graphe complet.

(c) Montrer que $|E_{A,B}| \leq k|B|$.
From Tatiana

Dans la partie A il y a k sommets, alors si tous les arêtes soient à partie B, cela sera le maximum

(d) Montrer $|E_{A,C}| \leq \sum_{v \in C} d(v)$.
From Tatiana

La somme de degrés à partie C ne peut pas plus petite que le nombre des arêtes de partie A qui viennent.

(e) Conclure.
From Tatiana

$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + k|B| + \sum_{v \in C} d(v) = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$

From Tatiana

Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on note d'_i le degré de v_i dans le sous-graphe de G induit par A. Enfin, on pose $d''_i = d_i - d'_i$.

Les deux conditions précédentes réunies fournissent une caractérisation des suites graphiques, ce que nous ne montrerons pas. Nous allons à la place établir une caractérisation récursive des suites graphiques. Pour une suite décroissante (au sens large) d'entiers $d = (d_1, \ldots, d_n)$ non vide, on définit

$$d' = \operatorname{tri}(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

5. Expliquer d'une phrase comment d' est obtenue à partir de d.
From Tatiana

En découpant une truc avec de sommet qui a le degré d_1 aux destinations des premiers sommets.

6. Montrer que si d est non vide, d est graphique si et seulement si d' est graphique.
From Tatiana

Si d' est graphique on peux ajouter une sommet et les arêtes et cela sera aussi un truc grafique.
A autre côté : c'est à vous.

7. En déduire un algorithme qui, étant donnée une suite d donnée en entrée, décide si elle est graphique et construit un graphe de suite de degrés d quand c'est possible.
From Tatiana

Ici, je vous donne les liens utiles pout mieux comprendre les algorithmes utiles pour cet exercice.
https://en.wikipedia.org/wiki/Havel%E2%80%93Hakimi_algorithm
https://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Gallai_theorem

Graphe non orienté

Définition 3. Chaîne dans un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une chaîne dans G est une suite de sommets $v_0 v_1 \ldots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs $[v_{i-1}, v_i]$, $i \in 1..n$ est une arête de E. La longueur de la chaine est le nombre d'arêtes de la chaîne.

Définition 4. Cycle dans un graphe non orienté

Un cycle dans un graphe non orienté est une chaîne telle que $v_0 = v_n$.

Exercice 5 *Degré minimum, longueur des cycles et chemins.*

On rappelle que le degré minimum du graphe G est défini par $\delta(G) := \min_{v \in V} d(v)$.

1. Montrer que G contient une chaîne de longueur $\delta(G)$.
From Tatiana

Nous commençons avec un sommet arbitraire. Nous choisissons une arête arbitraire et la parcourons jusqu'au sommet voisin. Après cela, nous enlevons du graphe le sommet d'où nous venons. Dans le graphe restant, le degré minimum d'un sommet est au moins $n - 1$. Tant que le degré minimum du graphe est positif, nous pouvons passer par une autre arête jusqu'à un autre sommet et supprimer le sommet précédent. Nous répétons cette opération autant de fois que possible. Il est clair que le degré minimum sera nul au plus tôt après n étapes. Nous avons ainsi choisi un chemin composé d'au moins n arêtes, c'est-à-dire sur le sommet $n + 1$. Bien sûr, par construction, ce sera simple. Par contre, il n'y a pas de chemins plus long dans le graphe K_{n+1}, et le degré minimum est n.

2. Si $\delta(G) \geq 2$, montrer que G contient un cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$.

From Tatiana

On regarde le cycle le plus long. Ce cycle existe parce que le graphe n'est pas une arbre. Si ce cycle est de longueur au plus $\delta(G)$, ce cycle est connecté avec d'autres sommets.

Soit C une chaîne élémentaire maximale qui n'est pas un cycle. Prenons une des extrémités de C, disons x, comme $d(x) \geqslant \delta(G) \geqslant 2$, il y a $\delta(G) - 1$ arête(s) en x qui ne font pas partie de la chaîne. Cette (ou ces) arête(s) ne peut (peuvent) déboucher sur un sommet qui n'appartient pas à la chaîne, sinon on pourrait allonger C ce qui contredirait sa maximalité. En particulier cela implique qu'il y a au moins $\delta(G) + 1$ sommets (x et ses au moins $\delta(G)$ voisins) dans cette chaîne et qu'elle est de longueur au moins $\delta(G)$. Écrivons la chaîne $[x_l, x_l - 1, ..., x2, x1, x]$, et soit i_0 le plus grand indice i tel que x est relié à x_i, i.e. $i_0 = max_{i \leqslant l}\{i | [x_i, x] \in E\}$. Comme toutes les arêtes en x mènent à un sommet de C, et qu'il y a $\delta(G)$ telles arêtes on obtient que $i_0 \geqslant \delta(G)$ et $[x, x_{i_0}, x_{i_0-1}, ..., x_2, x_1, x]$ est un cycle de longueur $i_0 + 1 \geqslant \delta(G) + 1$.