

Algorithmique de Graphes – Distance, diamètre, connexité. Le TD du 6 Novembre 2019Tatiana Babicheva. Link : <https://www.babichev.org/TD/>

Tous les graphes considérés dans cette section sont simples et non orientés. Les chemins et cycles considérés sont, sauf indication contraire, élémentaires : ils ne passent pas plusieurs fois par le même sommet.

Exercice 1 Rayon, diamètre.

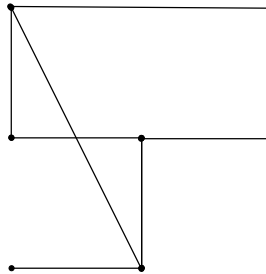
On rappelle que l'excentricité d'un sommet u est défini par $e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$ où $d(u, v)$ est la distance de u à v (c'est-à-dire la longueur minimale d'un chemin de u à v). Le rayon du graphe G est défini par $r(G) = \min_{v \in V} e(v)$. Le diamètre de G est défini par $d(G) = \max_{u, v \in V} d(u, v)$.

1. Calculer le nombre maximum de sommets d'un graphe de degré au plus Δ et de rayon au plus k .
2. Montrer que $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.
3. Exhiber des graphes arbitrairement grands vérifiant $d(G) = r(G)$ et $d(G) = 2r(G)$.

Exercice 2 Centre

On veut trouver un serveur dans un réseau qui soit le plus proche possible de tous les autres noeuds du réseau. Cette position s'appelle le centre dans un graphe (le sommet qui minimise le maximum des distances aux autres sommets). C'est le sommet d'excentricité minimale.

1. La distance entre deux sommets est le plus court chemin entre ces deux sommets. Proposer un algorithme qui trouve le plus court chemin d'un sommet à un autre. Il peut être plus facile de calculer simultanément le plus court chemin d'un sommet à tous les autres.
2. Donner le centre et les deux sommets les plus distants du graphe suivant.



3. Donner le centre d'une grille de taille n fois n (justifier).
4. En utilisant l'algorithme de plus court chemin, donner un algorithme qui calcule le centre de n'importe quel graphe.

Exercice 3 Intersection des chemins de longueur maximale dans un graphe.

1. Dans un graphe connexe, montrer que deux chemins de longueur maximale ont un sommet en commun.
2. Est-ce vrai dans un graphe non connexe ?

Exercice 4 Tours de Hanoï.

On dispose de trois piquets A, B, C , ainsi que de n disques de diamètres distincts. Une position est légale si tous les disques sont sur les piquets, et si aucun des disques ne repose sur un disque de diamètre inférieur. Un coup consiste à déplacer le disque se trouvant au sommet d'un piquet pour le placer au sommet d'un autre (la position obtenue doit être légale). On définit le graphe simple non orienté $G_n = (V_n, E_n)$ associé à ce jeu de la manière suivante :

- V_n est l'ensemble des positions légales ;
- $[u, v] \in E_n$ si on peut passer de u à v en un coup.

Enfin, on définit deux positions particulières : la position *initiale* où tous les disques sont sur A , et la position *finale* où tous les disques sont sur B . On note d_n le nombre de coups nécessaires pour atteindre la position finale à partir de la position initiale ($d_n = +\infty$ si c'est impossible).

1. On commence par regarder le cas $n = 2$.

- Dessiner G_2 .
- Calculer la distance de chaque position à la position initiale. Combien de coups sont nécessaires pour passer de la position initiale à la position finale dans G_2 ?
- Choisir un sommet correspondant à une position où les deux disques ne sont pas sur le même piquet. Calculer la distance de cette position à chacune des autres.
- Par symétrie, en déduire le diamètre de G_2 . Comparer à d_2 .

On s'intéresse maintenant au cas général du jeu à n disques. Pour chacune des questions, on commencera par reformuler la question en utilisant la terminologie des graphes.

2. Calculer le nombre de positions légales.
3. Quels sont les nombres minimaux et maximaux de coups possibles pour une position ?
4. Montrer qu'une suite de coups permet de passer de n'importe quelle position à n'importe quelle autre.
5. Combien de coups sont nécessaires pour passer de la position finale à la position initiale ? D'autres couples de positions réalisent-elles cette distance ?
6. Donner un algorithme qui résout les tours de Hanoï. Quel est sa complexité ?

Graphe non orienté

Définition 1. Connexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est *connexe*, si pour toute paire de sommets distincts $u \in V$ et $v \in V$, il existe une chaîne de u à v dans G .

Définition 2. Connexité au sens des arêtes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tel que $|V| > 1$. $F \subseteq E$ est un ensemble d'arêtes déconnectant G si $(V, E \setminus F)$ n'est pas connexe.
 $\lambda(G)$ est le cardinal du plus petit ensemble d'arêtes déconnectant G .

Définition 3. k -connexe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tel que $|V| > 1$. G est *k -connexe* si $\lambda(G) \geq k$.

Exercice 5

Calculer $\lambda(G)$ (cf. définition 2) pour les graphes non orientés suivants :

- Un arbre ;
- Chaîne de longueur $n \geq 1$;
- Cycle de longueur $n \geq 3$;
- Graphe complet à $n \geq 2$ sommets ;
- Graphe complet biparti $K_{\ell, m}$ avec $\ell \geq 1$ et $m \geq 1$.

Exercice 6

Exhiber un graphe non orienté 1-connexe sans sommet de degré 1. Sans sommet de degré k ?

Exercice 7

Soit G un graphe non orienté connexe et a une arête de G . Montrer que $\lambda(G) - 1 \leq \lambda(G - a) \leq \lambda(G)$. Ceci est-il vrai dans le cas orienté ?