**Algorithmique de Graphes – Connexité et les parcours. Le TD du 13 Novembre 2019**

*Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/*

## Graphe orienté

**Définition 1. Graphe Orienté**

$G = (V, A)$ où $V$ est un ensemble fini de sommets et où $A \subseteq V \times V$ est un ensemble de paires *ordonnées* de sommets appelées *arcs*.

- On note $(u, v)$ l'arc entre les sommets $u$ et $v$ de $G$.
- Pour un arc $(u, v) \in A$, $v$ est un *successeur* de $u$ et $u$ est un *prédecesseur* de $v$.
- L'arc $(u, v)$ est un *arc sortant* du sommet $u$ et un *arc entrant* du sommet $v$.

**Définition 2. Adjacence**

Deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune. Deux sommets sont adjacents s'il existe un arc dont les extrémités sont ces deux sommets.

**Définition 3. Degré entrant**

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Le degré entrant d'un sommet $u \in V$, noté $d^+(u)$ est le nombre d'arcs entrants dans le sommet $u$.

**Définition 4. Degré sortant**

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Le degré sortant d'un sommet $u \in V$, noté $d^-(u)$ est le nombre d'arcs sortants du sommet $u$.

**Définition 5. Chemin dans un graphe orienté**

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Un chemin dans $G$ est une suite de sommets $v_0 v_1 \dots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs $(v_{i-1}, v_i)$, $i \in 1..n$ est un arc de $A$. La longueur du chemin est le nombre d'arcs du chemin.

**Définition 6. Circuit dans un graphe orienté**

Un circuit dans un graphe orienté est un chemin tel que $v_0 = v_n$.

**Définition 7. Forte Connexité**

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. $G$ est *fortement connexe*, si pour toute paire ordonnée de sommets distincts $u \in V$ et $v \in V$, il existe un chemin de $u$ à $v$ dans $G$.

**Définition 8. Connexité au sens des arcs**

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté tel que $|V| > 1$. $F \subseteq A$ est un ensemble d'arcs déconnectant $G$ si $(V, A \setminus F)$ n'est pas fortement connexe.

$\lambda(G)$ est le cardinal du plus petit ensemble d'arcs déconnectant $G$.

**Définition 9. $k$-fortement connexe**

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté tel que $|V| > 1$. $G$ est *$k$-fortement connexe* si $\lambda(G) \geq k$.

**Exercice 1** *Forte connexité.*

1. Montrer que si un graphe orienté $G$ est fortement connexe, alors chaque arc de $G$ appartient à un circuit.
2. Montrer qu'un graphe $G$ est fortement connexe si et seulement si chaque sommet de $G$ est la racine d'une arborescence et d'une anti-arborescence de $G$.
3. Un graphe orienté $G$ est dit *fortement cyclique* si pour chaque paire de sommets $x, y$ de $G$, il y a une séquence de circuits $C_1, \ldots, C_k$ tels que $x$ est dans $C_1$, $y$ est dans $C_k$, et $C_i$ et $C_{i+1}$ ont au moins un sommet commun. Montrer que $G$ est fortement connexe si et seulement si $G$ est fortement cyclique.
4. Proposer un algorithme pour décider si un graphe est fortement connexe et un autre pour trouver un cycle.

**Exercice 2**

Soit $G$ un graphe orienté $k$-fortement connexe avec $k \geq 2$. Soit $G'$ un graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet $x$ à $G$ ainsi que les arcs suivants :

— $k$ arcs sortants de $x$ vers $k$ sommets distincts de $G$ ;

— $k$ arcs entrants en $x$ à partir de $k$ sommets distincts de $G$.

Montrer que $G'$ est $k$-fortement connexe.

**Exercice 3**

Soit $n \geq 2$. Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe non orienté $G$ à $n$ sommets vérifiant $\lambda(G) = 1$ ?

**Exercice 4**

Montrer que si un graphe non orienté $G$ contient deux arbres couvrants arête-disjoints, alors $\lambda(G) \geq 2$. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 5**

Étant donné deux entiers $1 < k < n$, on note $m(k, n)$ le nombre minimum d'arêtes d'un graphe non orienté $k$-connexe à $n$ sommets.

1. Montrer que $m(k, n) \geq kn/2$.
2. On suppose dans cette question que $k$ et $n$ sont pairs. On définit le graphe $G_{k,n}$ sur les sommets $\{0, \ldots, n-1\}$ par : $[i, j] \in E$ si et seulement si $i - j \in \{-k/2, \ldots, k/2\} \setminus \{0\}$ (l'addition est prise modulo $n$). Montrer que $G_{k,n}$ est $k$-connexe. En déduire la valeur de $m(k, n)$ pour $k$ et $n$ pairs (vérifiant $1 < k < n$).
3. Adapter la construction de la question précédente aux couples d'entiers quelconques vérifiant $1 < k < n$. En déduire la valeur de $m(k, n)$ pour tous ces couples d'entiers.
4. Montrer que $\lambda(G_{k,n}) = k$.
5. Dessiner deux graphes 5-connexe à 9 sommets non isomorphes.

**Exercice 6**

Une entreprise d'informatique souhaite lancer la construction d'un nouvel ordinateur. La conception d'un tel ordinateur implique son passage successif sur différentes machines $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, avec un passage unique sur chaque machine.

Afin de planifier cette construction, on considère un graphe orienté $G$ dans lequel :

— les sommets sont les machines,

— un arc $(m, m')$ dans $G$ signifie que l'ordinateur doit impérativement être traité par la machine $m$ avant d'être traité par la machine $m'$.

1. Quelle propriété de $G$ indiquerait que la construction est logiquement impossible ? Concevez un algorithme, utilisant un parcours en largeur, qui dit si cette propriété est ou non vérifiée pour $G$.
2. On considère à présent que la construction est possible. On désire indiquer un ordre de passge de l'ordinateur sur les machines. Pour ce faire, une machine $m$ est numérotée $i$ si elle est la $i^{eme}$ machine utilisée.

   Quelle propriété doit vérifier une telle numérotation des sommets de $G$ ? Concevez un algorithme, utilisant un parcours en profondeur, qui donne une numérotation possible des sommets de $G$. Pourquoi peut-on parler ici de "Tri topologique" ?