Algorithmique de Graphes – Arbres couvrants, Plus courts chemins et Flots. Coloration. Le TD du 20 Novembre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Exercice 1 *Arbres de recouvrements minimum*
Examiner l'arbre T obtenu dans la construction suivante et dites si c'est un arbre de recouvrement minimum de G ; si oui, expliquer pourquoi, sinon construire un contre-exemple.

Soit $G = (V, E, W)$, un graphe non orienté connexe valué. Initialement T est vide. Soit s un sommet quelconque. On choisit une arête v incidente à s, de coût minimum qu'on ajoute à T. Soit x l'autre extrémité de l'arête. On recommence avec ce sommet x : on cherche une arête incidente à x, de coût minimum qui n'est pas dans T et on l'ajoute à T, et ainsi de suite. On s'arrête lorsque T a $n - 1$ arêtes.
From Tatiana

C'est presque algorithme de Prim :
http ://www.irem.univ-bpclermont.fr/IMG/pdf/3Recouvrant.pdf
Par contre, l'algorithme décris ne fait pas l'optimum (il y a beaucoup de contre-examples, comme cycle 1-1-1-7)

Exercice 2 *Calcul des plus longs chemins*
Cet exercice consiste à adapter l'algorithme de Bellman-Ford pour calculer les plus longs chemins dans un graphe orienté sans circuit.

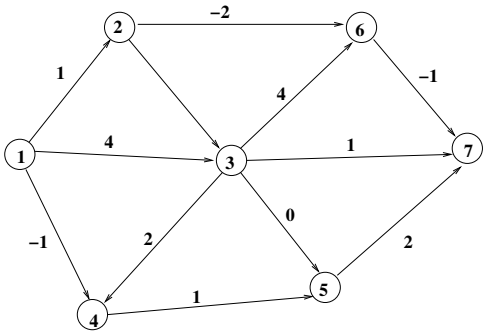
Les données du problème sont $G = (S, A, V)$, un graphe orienté valué sans circuit possédant un sommet source $s \in S$. Nous notons $\Lambda(x)$ la longueur d'un plus long chemin d'origine s et d'extrémité x.

1. Montrer qu'il existe un plus long chemin de s à x. **From Tatiana**

2. Adapter l'algorithme de Bellman pour calculer les plus longs chemins d'origine s. **From Tatiana**

   Par example, on repondere les arcs par les nombres contraires : x -¿ -x.

3. Appliquer l'algorithme au graphe suivant.



   From Tatiana

4. Montrer que cet algorithme calcule les plus longs chemins.
   From Tatiana

Exercice 3 *Diamètre*
Le **diamètre** d'un arbre $T = (S, A)$ est donné par :

$$\max_{u,v \in S} \delta(u, v)$$

autrement dit, le diamètre est la plus grande de toutes les distances des plus courts chemins dans l'arbre. Donner un algorithme efficace permettant de calculer le diamètre d'un arbre, et analyser son temps d'exécution.
From Tatiana

Le problème du coloriage de graphe consiste à assigner à chaque sommet une couleur, de façon à ce que deux sommets adjacents soient de couleurs diffèrentes. Si c'est possible avec k couleurs, on dit que le graphe est *k-coloriable*.

Exercice 4 *Exemples introductifs.*

1. Quel est le nombre chromatique de la chaine à n sommets P_n ?
   From Tatiana

   2

2. Quel est le nombre chromatique du graphe complet K_n ?
   From Tatiana

   n

3. Quel est le nombre chromatique du cycle C_n ?

   From Tatiana

   2 si n est pair, 3 si n est impair

Exercice 5 *Graphes bipartis.*

1. Rappeler ce qu'est un graphe biparti. Donner un exemple.
   From Tatiana

   En théorie des graphes, un graphe est dit biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V telle que chaque arête ait une extrémité dans U et l'autre dans V.

2. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il est 2-coloriable ($\chi(G) \leq 2$).
   From Tatiana

   Équivalemment, si on peut partitionner l'ensemble de sommets en deux parties X et Y telles que toute arête a une extrémité dans X et l'autre dans Y .

3. Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il ne possède pas de cycles de taille impaire.
   From Tatiana

   Soit G = (V, E) un graphe biparti. Soit C une chaîne fermée de longueur impaire et soit $(v_0, ..., v_{2n+1})$ la suite de sommet associé à C . On suppose que $v_0 \in V_1$. Puisque G est biparti et $(v_i, v_{i+1}) \in E$ on voit facilement que $v_k \in V_2$ si k est impair et $v_k \in V_1$ si k est pair. Ainsi, $v_{2n+1} \in V_2$ et C n'est pas fermée.
   Soit G = (V, E) un graphe connexe ne contenant pas de chaîne fermée de longueur impaire et soit $u \in V$.
   On pose
   $V_1 = \{v \in V | \exists$ une chaîne de longueur impaire de u à v dans $G\}$
   $V_2 = \{v \in V | \exists$ une chaîne de longueur paire de u à v dans $G\}$
   On a alors

   — $V = V_1 \cup V_2$ puisque G est connexe
   — $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. En effet s'il existe $v \in V_1 \cap V_2$ alors on peut trouver une chaîne C_p de longueur paire et une chaîne C_i de longueur impaire allant de u vers v. Mais alors on aurait une chaîne fermée de longueur impaire u
   — Il n'existe pas d'arête entre deux sommets de V_1. En effet, soit $v, w \in V_1$. Il existe C_1 et C_2 deux chaînes de longueur paire joignant u à v et w respectivement. Si $a = [v, w] \in E$ alors il existe un cycle de longueur impair. C'est une contradiction.
   — Il n'existe pas d'arête entre deux sommets de V_2 (la même logique)

   On voit donc que G est biparti.

4. Donner un algorithme efficace pour décider si un graphe est biparti (et calculer une partition des sommets témoignant de la bipartition dans le cas où la réponse est positive).

Exercice 6 *Une propriété des colorations optimales*

Montrer que dans une coloration optimale d'un graphe G (c'est-à-dire une coloration avec $\chi(G)$ couleurs), il existe un sommet de chaque couleur qui "voit" toutes les autres couleurs.

From Tatiana

Supposons qu'une couleur qui n'a pas de sommets qui puisse "voir" toutes les autres couleurs. Ensuite, pour chaque sommet de cette couleur, il existe une couleur différente sur laquelle nous pouvons le repeindre. Avec ce repeinte, nous allons alors réduire la coloration d'une couleur.