Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines. Master 1 Informatique 2019-2020

Algorithmique de Graphes – Coloration. Couplage. Planarité. Le TD du 27 Novembre 2019
Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Exercice 1 *Nombre chromatique et nombre d'arêtes.*

Montrer qu'un graphe simple non orienté G à m arêtes vérifie

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Exercice 2 *Coloration effective*

Donner un algorithme qui donne une coloration propre, mais pas nécessairement minimale, d'un graphe. Quelle est sa complexité ?

Exercice 3 *Graphes k-chromatiques sans triangle*

Le but de cet exercice est de construire des graphes sans clique de taille 3 (sans triangle) de nombre chromatique arbitrairement grand.

Étant donné un graphe non orienté à $n \geq 1$ sommets $G = (\{u_1, \ldots, u_n\}, E)$, on définit le graphe à $2n + 1$ sommets

$$G' = (\{u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n, v\}, E \cup \{[u'_i, u_j] \mid [u_i, u_j] \in E\} \cup \{[u'_i, v] \mid 1 \leq i \leq n\}).$$

1. Si G est sans triangle, montrer que G' est sans triangle.
2. Montrer que $\chi(G') = \chi(G) + 1$. *Indication :* utiliser l'exercice **??**.
3. En déduire que pour tout $k \geq 1$, il existe un graphe sans triangle vérifiant $\chi(G) = k$.

Exercice 4 *Nombre chromatique de la somme cartésienne de deux graphes.*

La *somme cartésienne* de deux graphes non orientés $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ est le graphe $G \square H = (V, E)$ défini par :

— $V = V_G \times V_H$;

— $[(u, x), (v, y)] \in E$ si et seulement si $u = v$ et $[x, y] \in E_H$, ou $[u, v] \in E_G$ et $x = y$.

1. Dessiner la somme cartésienne de deux graphes G et H de votre choix.
2. On suppose que G et H sont deux graphes non vides. Montrer que

$$\max(\chi(G), \chi(H)) \leq \chi(G \square H) \leqslant \chi(G) \cdot \chi(H).$$

3. Montrer que si G est une chaîne à au moins deux sommets et H non vide, alors

$$\chi(G \square H) = \max(2, \chi(H)).$$

4. Généraliser ce dernier résultat au cas où G est un graphe biparti quelconque.
5. Cas général : montrer que si G et H sont deux graphes non vides, $\chi(G \square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$.