Algorithmique de Graphes –Coloration. Couplage. Le TD du 28 Novembre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Graphe non orienté

Définition 1. Graphe biparti

Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe non orienté. G est biparti si toutes les arêtes de E ont une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.

Exercice 1 *Nombre chromatique et nombre d'arêtes.*

Montrer qu'un graphe simple non orienté G à m arêtes vérifie

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

From Tatiana

Pour chaque graphe G le nombre d'arêtes dans ce graphe est au minimum at least $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$. Pourquoi c'est ça ? Parce que avec une coloration de G avec $\chi(G)$ couleurs, il doit y avoir une arête entre toutes les deux classes de couleurs, sinon nous pourrions les colorer de la même couleur.

En ouvrant les parentheses on obtient l'inégalité demandée.

Exercice 2 *Coloration effective*

Donner un algorithme qui donne une coloration propre, mais pas nécessairement minimale, d'un graphe. Quelle est sa complexité ?

From Tatiana

Parmi les algorithmes exacts (donc de complexité exponentielle dans le cas général) citons l'algorithme de Zykov (par la méthode de Branch and Bound).

Algorithme heuristique de Welsh et Powell :

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants (dans certains cas plusieurs possibilités).
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore coloré de la liste.
8. Répéter les opérations 3 à 7.
9. Continuer jusqu'à avoir coloré tous les sommets.

Remarquons que cette méthode peut aboutir à la pire des colorations possibles, par-exemple si le graphe G a la structure de couronne à n sommets, son nombre chromatique est 2 (si n est pair) tandis que Welsh-Powell donne dans certains cas (selon l'ordre dans lequel sont rangés les sommets) une coloration utilisant $n/2$ couleurs !

Exercice 3 *Graphes k-chromatiques sans triangle*

Le but de cet exercice est de construire des graphes sans clique de taille 3 (sans triangle) de nombre chromatique arbitrairement grand.

Étant donné un graphe non orienté à $n \geq 1$ sommets $G = (\{u_1, \ldots, u_n\}, E)$, on définit le graphe à $2n+1$ sommets

$$G' = \left(\{u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n, v\}, E \cup \{[u'_i, u_j] \mid [u_i, u_j] \in E\} \cup \{[u'_i, v] \mid 1 \leq i \leq n\}\right).$$

1. Si G est sans triangle, montrer que G' est sans triangle.

   From Tatiana

Par l'absurde (pas des triangles avec v ; si il y a une avec ' sommet et deux non ', etc...)

2. Montrer que $\chi(G') = \chi(G) + 1$. *Indication :* utiliser l'exercice **??**.
From Tatiana

Graphe de Mucielski
le proof : par contraire, si il y a n couleurs, le graphe au top (T) contient $n-1$ couleurs en maximum, en bas il y a une sommet de couleur x qui "voit" tous les couleurs, alors sommet ' voit tous les couleurs. Contradiction

3. En déduire que pour tout $k \geq 1$, il existe un graphe sans triangle vérifiant $\chi(G) = k$.
From Tatiana

induction

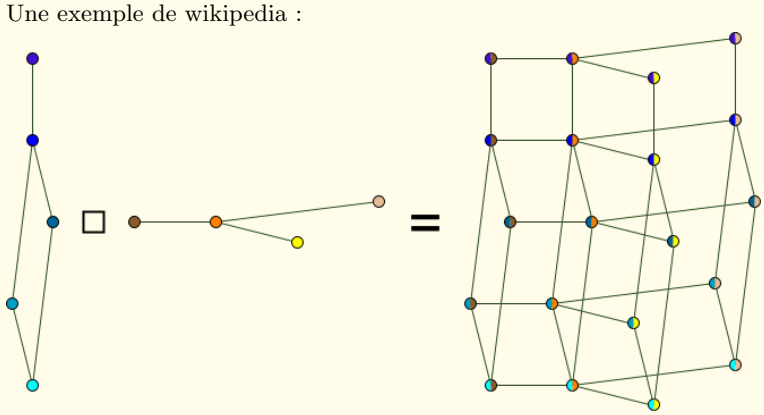
Exercice 4 *Nombre chromatique de la somme cartésienne de deux graphes.*

La *somme cartésienne* de deux graphes non orientés $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ est le graphe $G\square H = (V, E)$ défini par :

— $V = V_G \times V_H$;
— $[(u, x), (v, y)] \in E$ si et seulement si $u = v$ et $[x, y] \in E_H$, ou $[u, v] \in E_G$ et $x = y$.

1. Dessiner la somme cartésienne de deux graphes G et H de votre choix.
From Tatiana

Une exemple de wikipedia :



2. On suppose que G et H sont deux graphes non vides. Montrer que

$$\max(\chi(G), \chi(H)) \leq \chi(G\square H) \leqslant \chi(G) \cdot \chi(H).$$

From Tatiana

Le produit cartésien contient chaque des graphes, alors $\max(\chi(G), \chi(H)) \leq \chi(G\square H)$
Si on fait le coloration différente pour chaque subgraph, on obtient l'exemple de coloration pour $\chi(G\square H) \leqslant \chi(G) \cdot \chi(H)$.

3. Montrer que si G est une chaîne à au moins deux sommets et H non vide, alors

$$\chi(G\square H) = \max(2, \chi(H)).$$

From Tatiana

On peut colorer les subgraphs en "bougeant" les couleurs en "$1->2->3->\ldots->1$" par les "niveaux".

4. Généraliser ce dernier résultat au cas où G est un graphe biparti quelconque.
From Tatiana

les mêmes exemple et formule que pour la chaîne

5. Cas général : montrer que si G et H sont deux graphes non vides, $\chi(G\square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$.
From Tatiana

Article — here it is Lemma 2.6

(2.6) LEMMA. *Let $\chi(X)$, $\chi(Y)$, $\chi(X \times Y)$ be the chromatic numbers of X, Y and $X \times Y$ respectively. Then $\chi(X \times Y) = \max(\chi(X), \chi(Y))$.*

Proof. The maximal subgraphs X_y, Y_x of $X \times Y$ with

$$V(X_y) = V(X) \times \{y\},\ y \in V(Y),$$
$$V(Y_x) = \{x\} \times V(Y),\ x \in V(X),$$

are isomorphic to X and Y respectively. Hence $\chi(X \times Y) \geqslant m$, where $m = \max(\chi(X), \chi(Y))$. Let c_X, c_Y be m-colorings of X and Y respectively (an m-coloring of X is a function c_X of $V(X)$ into J_m, the group of integers (mod m), such that $[x,x'] \in E(X)$ implies $c_X(x) \neq c_X(x')$; likewise for Y). Define a function c of $V(X \times Y)$ into J_m by

$$c(x,y) = c_X(x) + c_Y(y),\ x \in V(X),\ y \in V(Y).$$

c is an m-coloring of $X \times Y$. To show:

$$[(x,y), (x',y')] \in E(X \times Y) \rightarrow c(x,y) \neq c(x',y');$$

$[(x,y),(x',y')] \in E(X \times Y) \rightarrow x = x', [y,y'] \in E(Y)$, or $y = y', [x,x'] \in E(X)$.

It suffices to consider the first case: $x = x' \rightarrow c_X(x) = c_X(x')$; $[y,y'] \in E(Y) \rightarrow c_Y(y) \neq c_Y(y')$. Hence

$$c(x,y) = c_X(x) + c_Y(y) \neq c_X(x') + c_Y(y') = c(x',y').$$

Since c is an m-coloring of $X \times Y$, it follows that $\chi(X \times Y) \leqslant m$.