Algorithmique de Graphes – Couplage. Planarité. Le TD du 4 Decembre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Graphe non orienté

Définition 1. Couplage

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un *couplage* de G est un sous-ensemble d'arêtes $C \subset E$ tel que chaque sommet de V est l'extrémité d'au plus une arête de C.

Définition 2. Couplage parfait

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un couplage C est parfait si chaque sommet de V est l'extrémité d'exactement une arête de C.

Exercice 1 *Exemples introductifs*

1. Montrer que si $G = (V, E)$ contient un couplage parfait, alors $|V|$ est pair.
2. Déterminer les entiers n tels que P_n (chaîne à $n + 1$ sommets) contient un couplage parfait.
3. Donner le nombre minimum d'arêtes d'un graphe à $2p$ sommets contenant un couplage parfait.
4. Montrer que si un graphe ayant un nombre pair de sommets contient un cycle hamiltonien (un cycle passant exactement une fois par chaque sommet) alors il contient deux couplages parfaits disjoints. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 *Couplages dans les arbres binaires, aspects algorithmiques.*

On considère dans cet exercice des arbres binaires enracinés planaires. Enraciné signifie qu'un sommet unique est *marqué*, c'est la racine. Planaire signifie qu'on distingue le fils gauche et le fils droit. Les arbres considérés peuvent avoir des noeuds possédant un seul fils (contrairement à d'autres types d'arbres binaires où chaque noeud possède 0 ou 2 fils).

1. Donner deux exemples d'arbres binaires à 10 sommets et de hauteur 3, l'un contenant un couplage parfait, et l'autre non.
   Dans les questions suivantes, on s'intéresse aux aspects algorithmiques.
2. Donner une définition récursive des arbres binaires. En déduire une structure de données que vous utiliserez dans la suite du problème.
3. Écrire un algorithme récursif décidant en temps linéaire si un arbre binaire fourni en entrée contient un couplage parfait.

Graphe orienté et non orienté

Définition 3. Graphe planaire

Soit $G = (V, X)$ un graphe orienté ou non orienté. G est un graphe *planaire* si on peut le dessiner sur une sphère sans que les arcs ou les arêtes ne se croisent.

Exercice 3 *Exemples de graphes planaires et de graphes non planaires.*

1. Le graphe complet à 4 sommets K_4 est-il planaire ?
2. Peut-on construire un graphe 5 régulier planaire ?

Exercice 4 *Stratégie*

Vous engagez un combat de vos unités contre celles de l'adversaire dans un jeu de stratégie. On représente la situation par un graphe G avec deux ensembles disjoints de sommets V_1 et V_2 qui représentent respectivement vos unités et les siennes. Une arête entre un sommet u de V_1 et v de V_2 est étiquetée par un nombre entier qui correspond aux dégâts qu'inflige l'unité u à v. Bien sûr l'unité u n'inflige pas nécessairement les mêmes dégâts aux unités v et w. On veut donc choisir pour chacune des unités de V_1, l'unité de V_2 qu'elle va combattre afin de maximiser la somme des dégâts.

1. Quelle est la nature du graphe décrit ?
2. Donner un exemple avec $|V_1| = |V2| = 4$.
3. Soit E un ensemble d'arêtes qui est un couplage de G, c'est à dire que chaque sommet de G est incident à au plus une arête. Donner un ensemble E qui est un couplage dans votre exemple.
4. Soit C un cycle alternant, c'est à dire que ses arêtes sont alternativement dans E et hors de E. On note $C \triangle E$ l'ensemble des arêtes qui sont dans E ou dans C mais pas dans les deux.
5. Donner un cycle alternant C dans votre exemple et vérifier que $C \triangle E$ est un couplage.
6. Montrer en général que $C \triangle E$ est un couplage.
7. La valeur d'un cycle alternant C est la somme des étiquettes des arêtes qui le constituent, comptées positivement quand elles ne sont pas dans E et négativement sinon. Montrer que quand la valeur de C est positive, $C \triangle E$ a une plus grande valeur que E.

Exercice 5 *Couplage dans les graphes bipartis*

Soit $G = ((A \cup B), E)$ un graphe biparti avec A, et B les deux ensembles de sommets tels que chaque arête de G a une extrémité dans A et une autre dans B.

1. Proposer un algorithme pour trouver un couplage maximum, c'est à dire qui n'est inclus dans aucun autre couplage. Votre algorithme fonctionne-t-il sur un graphe quelconque ? Quelle est sa sa complexité ?
2. Sur un exemple, transformer G en un graphe de flot G_f en ajoutant un sommet source s et un sommet puits p de telle façon qu'il y a correspondance entre un couplage maximal de G et un flot maximal de G_f.
3. Généraliser cette transformation. Montrer que l'ensemble des arêtes entre A et B traversées par le flot maximal forment un couplage maximal.

Exercice 6 *Relation d'Euler*

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire non vide *connexe*. Notons $n = |V|$, $a = |E|$. Considérons un dessin de G dans le plan (sans que les arêtes ne se croisent). Soit f le nombre de régions du plan délimitées par les arêtes de G.

1. Montrer la relation d'Euler $n - a + f = 2$.
2. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $2a \geqslant 3f$. En déduire que $a \leqslant 3n - 6$.
3. Montrer que le degré moyen des sommets $\bar{d} := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ vérifie $\bar{d} < 6$. En déduire qu'il existe un sommet de degré au plus 5 dans G.

Exercice 7 *Dessiner c'est gagner.*

On va dessiner des graphes planaires de manière planaire (c'est ce qu'on appelle un plongement dans le plan).

1. Dessiner le graphe K_5 avec une arête en moins de manière planaire.