Algorithmique de Graphes – Couplage. Le TD du 5 Decembre 2019

Tatiana Babicheva. Link : https ://www.babichev.org/TD/

Graphe non orienté

Définition 1. Couplage

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un *couplage* de G est un sous-ensemble d'arêtes $C \subset E$ tel que chaque sommet de V est l'extrémité d'au plus une arête de C.

Définition 2. Couplage parfait

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un couplage C est parfait si chaque sommet de V est l'extrémité d'exactement une arête de C.

Exercice 1 *Exemples introductifs*

1. Montrer que si $G = (V, E)$ contient un couplage parfait, alors $|V|$ est pair.
   From Tatiana

   LoL, trop facile. Chaque pair dans un couplage prend 2 sommets et il ne reste aucun sommet seul, alors le nombre des sommets est un nombre pair.

2. Déterminer les entiers n tels que P_n (chaîne à $n + 1$ sommets) contient un couplage parfait.
   From Tatiana

   Le nombre des sommets doit être pair, alors n doit être impair. L'exemple peut être construit facilement.

3. Donner le nombre minimum d'arêtes d'un graphe à $2p$ sommets contenant un couplage parfait.
   From Tatiana

   C'est bien sûr p

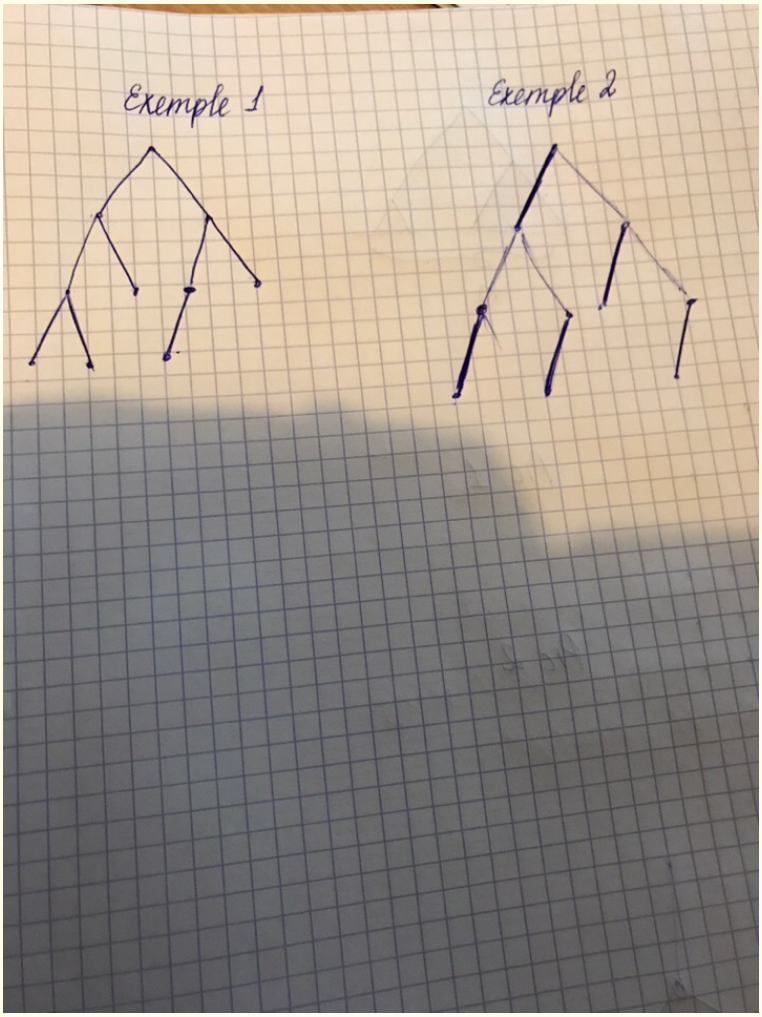
4. Montrer que si un graphe ayant un nombre pair de sommets contient un cycle hamiltonien (un cycle passant exactement une fois par chaque sommet) alors il contient deux couplages parfaits disjoints. La réciproque est-elle vraie ?
   From Tatiana

   Un cycle hamiltonian passe par chaque sommet une fois, alors on peut faire un exemple facilement.
   La réciproque n'est pas vraie, par exemple pour le graphe non connecté, cela ne marche pas.

Exercice 2 *Couplages dans les arbres binaires, aspects algorithmiques.*

On considère dans cet exercice des arbres binaires enracinés planaires. Enraciné signifie qu'un sommet unique est *marqué*, c'est la racine. Planaire signifie qu'on distingue le fils gauche et le fils droit. Les arbres considérés peuvent avoir des noeuds possédant un seul fils (contrairement à d'autres types d'arbres binaires où chaque noeud possède 0 ou 2 fils).

1. Donner deux exemples d'arbres binaires à 10 sommets et de hauteur 3, l'un contenant un couplage parfait, et l'autre non.
   From Tatiana



Dans les questions suivantes, on s'intéresse aux aspects algorithmiques.

2. Donner une définition récursive des arbres binaires. En déduire une structure de données que vous utiliserez dans la suite du problème.
   From Tatiana

3. Écrire un algorithme récursif décidant en temps linéaire si un arbre binaire fourni en entrée contient un couplage parfait.
   From Tatiana

Graphe orienté et non orienté

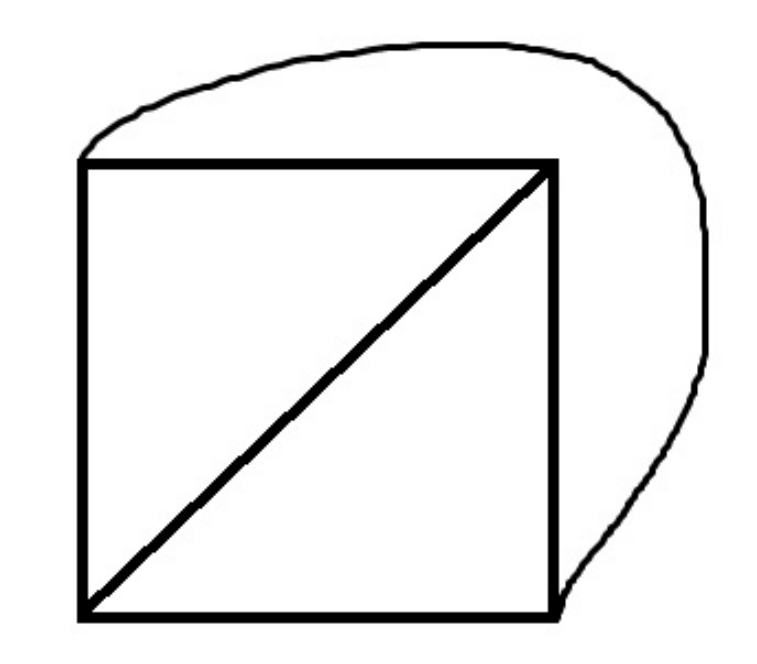
Définition 3. Graphe planaire

Soit $G = (V, X)$ un graphe orienté ou non orienté. G est un graphe *planaire* si on peut le dessiner sur une sphère sans que les arcs ou les arêtes ne se croisent.

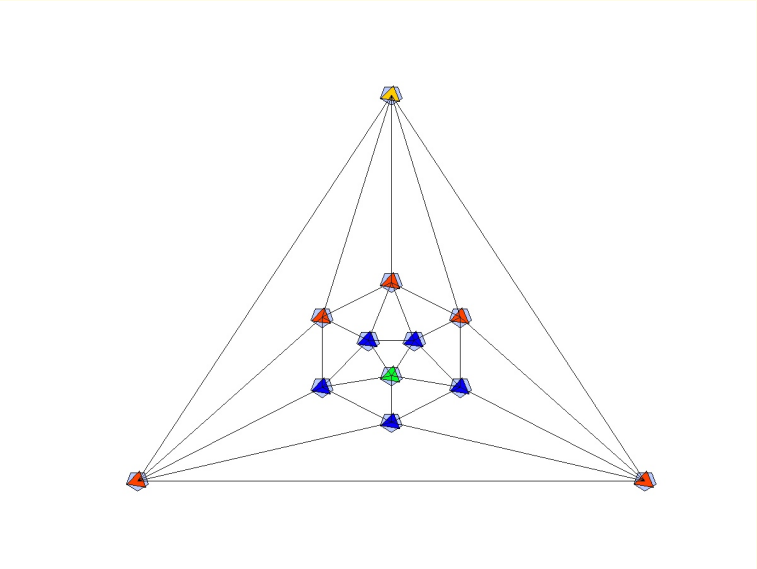
Un graphe est *planaire* si on peut le dessiner dans le plan sans que les arêtes ne se croisent.

Exercice 3 *Exemples de graphes planaires et de graphes non planaires.*

1. Le graphe complet à 4 sommets K_4 est-il planaire ? **From Tatiana**



2. Peut-on construire un graphe 5 régulier planaire ?
   From Tatiana



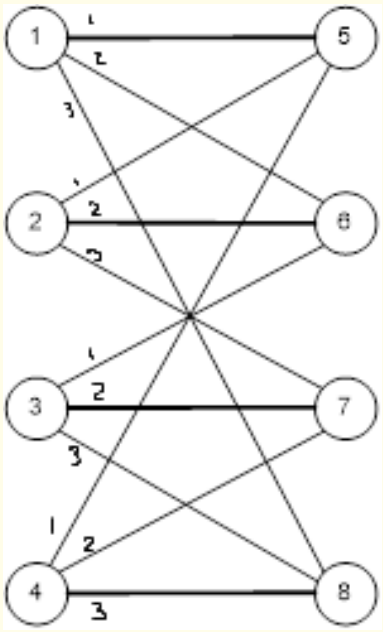
Exercice 4 *Stratégie*

Vous engagez un combat de vos unités contre celles de l'adversaire dans un jeu de stratégie. On représente la situation par un graphe G avec deux ensembles disjoints de sommets V_1 et V_2 qui représentent respectivement vos unités et les siennes. Une arête entre un sommet u de V_1 et v de V_2 est étiquetée par un nombre entier qui correspond aux dégâts qu'inflige l'unité u à v. Bien sûr l'unité u n'inflige pas nécessairement les mêmes dégâts aux unités v et w. On veut donc choisir pour chacune des unités de V_1, l'unité de V_2 qu'elle va combattre afin de maximiser la somme des dégâts.

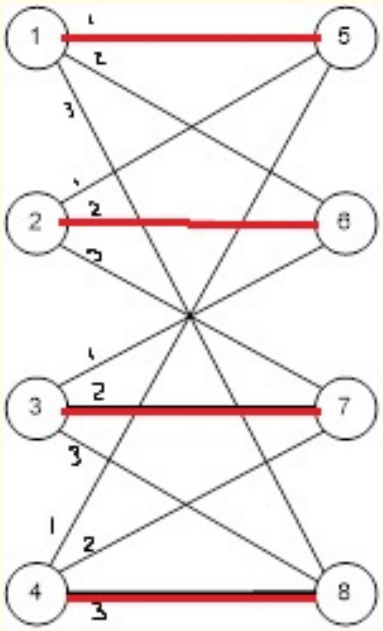
1. Quelle est la nature du graphe décrit ?
   From Tatiana

Graphe biparti

2. Donner un exemple avec $|V_1| = |V_2| = 4$.
   From Tatiana



3. Soit E un ensemble d'arêtes qui est un couplage de G, c'est à dire que chaque sommet de G est incident à au plus une arête. Donner un ensemble E qui est un couplage dans votre exemple.
   From Tatiana

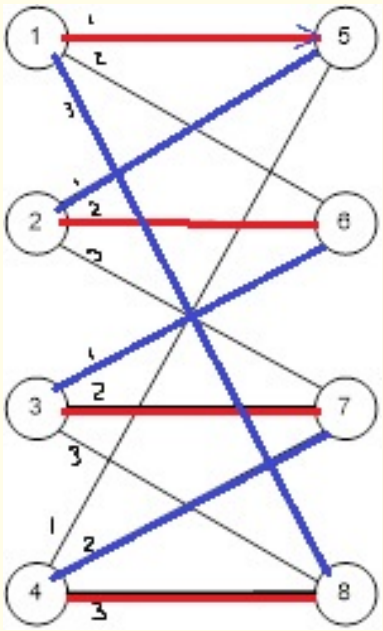


Le coupage est montré en rouge

4. Soit C un cycle alternant, c'est à dire que ses arêtes sont alternativement dans E et hors de E. On note $C \triangle E$ l'ensemble des arêtes qui sont dans E ou dans C mais pas dans les deux.
   From Tatiana

Il n'y a pas de question

5. Donner un cycle alternant C dans votre exemple et vérifier que $C \triangle E$ est un couplage.
   From Tatiana



Les arêtes bleues font aussi un couplage.

6. Montrer en général que $C \triangle E$ est un couplage.
   From Tatiana

Pour le cycle C, les arêtes bleues et arêtes rouges touchent les mêmes sommets, les arêtes rouges non incluses dans le cycle gardent le nombre de sommets.

7. La valeur d'un cycle alternant C est la somme des étiquettes des arêtes qui le constituent, comptées positivement quand elles ne sont pas dans E et négativement sinon. Montrer que quand la valeur de C est positive, $C \triangle E$ a une plus grande valeur que E.
   From Tatiana

La somme des valeurs négatives en valeur absolue est plus grande que la somme des valeurs positives.

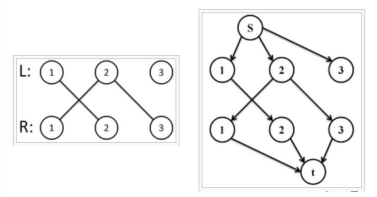
Exercice 5 *Couplage dans les graphes bipartis*

Soit $G = ((A \cup B), E)$ un graphe biparti avec A, et B les deux ensembles de sommets tels que chaque arête de G a une extrémité dans A et une autre dans B.

1. Proposer un algorithme pour trouver un couplage maximum, c'est à dire qui n'est inclus dans aucun autre couplage. Votre algorithme fonctionne-t-il sur un graphe quelconque ? Quelle est sa complexité ?
   From Tatiana

https ://www.di.ens.fr/algoL3/Projets/edmonds.pdf

2. Sur un exemple, transformer G en un graphe de flot G_f en ajoutant un sommet source s et un sommet puits p de telle façon qu'il y a correspondance entre un couplage maximal de G et un flot maximal de G_f.
   From Tatiana



3. Généraliser cette transformation. Montrer que l'ensemble des arêtes entre A et B traversées par le flot maximal forment un couplage maximal.
From Tatiana

Initialement, le couplage actuel est vide. À chaque étape de l'algorithme, nous prendrons en charge l'invariant suivant : le couplage trouvé actuellement inclut les arêtes dirigées de R vers L et uniquement celles-là.

1.Nous recherchons dans le graphe G' un chemin de s à t en cherchant en profondeur.

2.Si le chemin est trouvé, écraser la correspondance actuelle. Ensuite, nous inversons toutes les arêtes du chemin (l'arête (u, v) devient l'arête (v, u)) et supprimons les arêtes (s, L) et (R, t) couvrant les sommets appartenant à la correspondance courante.

3.Si le chemin n'a pas été trouvé, la correspondance actuelle est la valeur maximale et l'algorithme se termine. Sinon, passez à l'étape 1.

Exercice 6 *Relation d'Euler*

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire non vide *connexe*. Notons $n = |V|$, $a = |E|$. Considérons un dessin de G dans le plan (sans que les arêtes ne se croisent). Soit f le nombre de régions du plan délimitées par les arêtes de G.

1. Montrer la relation d'Euler $n - a + f = 2$.
From Tatiana

Ici, j'utilise autre notation de f — "face".

Nous utilisons la méthode d'induction mathématique. En guise de compteur, prenons le nombre de faces.

Base d'induction : un graphe planaire connecté avec une face est un arbre. Dans un arbre, le nombre d'arêtes est égal à un de moins que le nombre de sommets, donc

$$|V| - |E| + |F| = |V| - (|V| - 1) + 1 = 2.$$

La base est prouvée.

Supposons maintenant que pour toutes les graphes planaires connectées avec nombre des faces égal k, la relation d'Euler est vraie, et nous prouvons qu'avec le nombre des faces $(k + 1)$, tout sera bien.

Comme il y a plus d'une face, notre graphe contient un cycle. Regardons une arête arbitraire d'un cycle arbitraire.

Si vous l'effacez, le nombre de faces diminuera, mais le graphe restera connecté.

Par hypothèse, la formule d'Euler sera satisfaite pour le nouveau graphe, c'est-à-dire $|V|-(|E|-1)+(|F|-1) = 2$. En enlevant les parenthèses, nous obtenons l'égalité requise.

2. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $2a \geqslant 3f$. En déduire que $a \leqslant 3n - 6$.
From Tatiana

Chaque arête appartient à exactement deux faces, donc si nous notons par $\rho(f), f \in F$ le nombre d'arêtes délimitant la face f, alors $2|E| = \sum_{f \in F} \rho(f)$. D'autre côté, $\rho(f) \geqslant 3$, donc, $\sum_{f \in F} \rho(f) \geqslant 3|F|$.

En vertu de la transitivité de la relation d'ordre, nous obtenons l'expression souhaitée.

Pour deuxième formule, il suffit d'exprimer le nombre de faces en termes de nombre d'arêtes et de sommets de la formule d'Euler et de le remplacer par l'inégalité précédente.

3. Montrer que le degré moyen des sommets $\bar{d} := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ vérifie $\bar{d} < 6$. En déduire qu'il existe un sommet de degré au plus 5 dans G.
From Tatiana

Nous prouvons que dans tout graphe planaires, il existe un sommet de degré au plus cinq.

Considérons l'un des composants connectés de notre graphe planaire. Si le nombre de sommets est inférieur à trois, tout est évident. Sinon, il y a inégalité

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{a \in V} deg(a) \geqslant 3|V|.$$

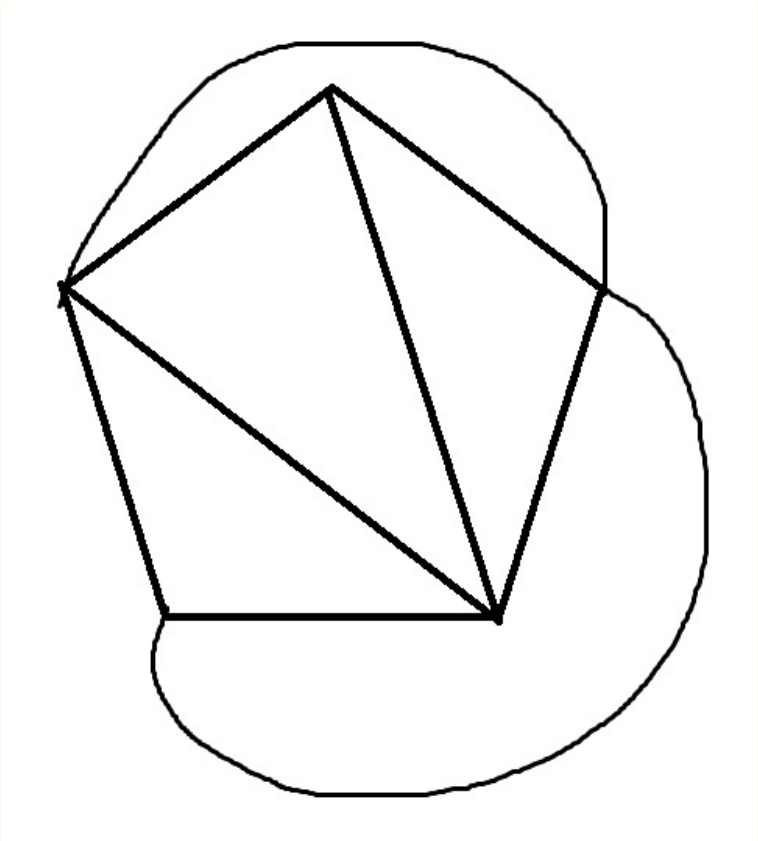
En utilisant l'inégalité ci-dessus, nous constatons que

$$3|V| \leqslant |E| \leqslant 3|V| - 6.$$

Contradiction.

Exercice 7 *Dessiner c'est gagner.*

On va dessiner des graphes planaires de manière planaire (c'est ce qu'on appelle un plongement dans le plan).

1. Dessiner le graphe K_5 avec une arête en moins de manière planaire.

From Tatiana